Санкт-Петербургский государственный университет
Научно-исследовательский институт менеджмента

НАУЧНЫЕ ДОКЛАДЫ

Ю. В. Федотов, Н. В. Хованов

Методы построения сводных оценок эффективности деятельности сложных производственных систем

№ 25(R)–2006

Санкт-Петербург
2006

Ю. В. Федотов, Н. В. Хованов. Методы построения сводных оценок эффективности деятельности сложных производственных систем. Научные доклады № 25(R)–2006. СПб.: НИИ менеджмента СПбГУ, 2006.

Анализируются вопросы представления задачи оценки различных качеств (надежности, эффективности, экологичности и т.д.) сложных объектов электроэнергетики (отдельных электрических генераторов, электростанций, линий электропередачи, генерирующих компаний и т.д.) как задачи многокритериального оценивания многопараметрических объектов, описываемых конечными наборами исходных характеристик. Кратко обсуждаются различные модели измерения исходных характеристик объектов электроэнергетики. Рассматриваются методы измерения характеристик по различным шкалам с последующей стандартной нормировкой значений этих характеристик и согласованием их влияния на уровень измеряемого качества объекта. Все полученные в результате такой нормировки отдельные показатели качества изменяются в одном и том же диапазоне от «0» (наименее предпочтительный уровень качества) до «1» (максимально достижимый уровень качества).

Выявляется «проблема несравнимости» оцениваемых объектов сразу по всем показателям качества: во многих случаях оказывается, что один из двух сравниваемых объектов превосходит второй по одним показателям, уступая этому второму объекту – по другим показателям. Для преодоления такой многокритериальной «несравнимости» объектов предлагается использовать метод сводных показателей (МСП), хорошо разработанный и широко применяемый в различных областях.

Рассмотрены основные виды функций, синтезирующих (агрегирующих) отдельные показатели качества в единую сводную оценку этого качества, учитывающую как значения используемых показателей, так и их значимость для оценки объекта в целом. Анализируется роль «весовых коэффициентов», позволяющих оценивать значимость отдельных показателей. Кратко обсуждены вопросы выбора синтезирующих функций, учитывающих различные варианты взаимной компенсации приращений отдельных показателей качества.

Федотов Юрий Васильевич — к.э.н., доцент, заведующий кафедрой государственного и муниципального управления факультета менеджмента Санкт-Петербургского государственного университета.

Хованов Николай Васильевич — д.э.н., профессор кафедры экономической кибернетики экономического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Saint Petersburg State University
Institute of Management

DISCUSSION PAPER

Yuri Fedotov, Nikolai Hovanov

Complex **P**roduction **S**ystems' **P**erformance **M**easurement: **M**ethods of **E**stimation **A**ggregate **I**ndices

25(R)–2006

Saint Petersburg
2006

Yuri Fedotov, Nikolai Hovanov. Complex Production Systems' Performance Measurement: Methods of Estimation Aggregate Indices. Discussion Paper #25(R)–2006. Institute of Management, Saint Petersburg State University: St. Petersburg, 2006.

The paper starts with the task of assessing different qualities (security, efficiency, matching ecological standards, etc.) of the complex units operating in electricity sector (power plants, current generators, electricity transmission lines, generating companies, etc.). Then the task considered as the problem of multi criteria assessment of the multidimensional objects, which are identified with a finite bundles of initial parameters. The paper gives brief exposition of different models applied for assessing the initial parameters of the operational units in electricity sector. Special attention is given to the methods for measuring objects' characteristics, quantified with magnitudes of different scales, and their consecutive standard normalization, which further allows for consistent description of the impacts they have upon the quality of the objects considered. Due to such normalization all separate quality parameters have the values within the interval between "0" (least preferable level of quality) and "1" (maximum feasible level of quality).
The paper articulates the "incomparability problem" for the objects under assessment. It typically occurs when one has to make the objects' comparison with the full range of their parameters. In many cases it happens that one of the objects is superior to another in regard to some of the parameters, but it is inferior in regard to the rest of them. To break such multi criteria "incomparability" we offer to use the Method of Aggregate Indices (MAI) which is well developed by now and widely used as an effective tool of analysis in different subject areas.
The paper studies main functional forms used for the synthesis (aggregation) of the separate quality indices into a single aggregate appraisal of the quality. The aggregate measure takes into account not only the magnitudes of the indices considered, but it also depends on how valuable they are for the object on the whole. Thus, the role of the "weight coefficients", which allow to assess the importance of each separate quality index, is discussed. The issues of selection of the most appropriate form of aggregating function are given brief consideration. These functions should reflect marginal substitution effects for each pair of separate quality indices.

Fedotov, Yuri V. — Associate Professor, Chair of Public Administration Department, School of Management, St.Petersburg State University.

Hovanov, Nikolai V. — Professor, Department of Economic Cybernetics, Faculty of Economy St.Petersburg State University.

Содержание

Содержание 5
Введение 6
Методы построения оценок качества сложных объектов 9
Модели измерения исходных характеристик сложных объектов 9
Методы построения нормированных оценок 15
Методы синтеза сводных показателей сложных объектов 23
Литература 30

Введение

При оценке сложных объектов электроэнергетики (теплоэлектрических станций, региональных генерирующих компаний, распределительных сетей и т.п.) фактически происходит их упорядочение (*ранжировка, рейтингование*) по степени проявления интересующего исследователя *качества* объекта, в роли которого могут выступать, например, «инвестиционная привлекательность» компании, «прибыльность» работы теплоэлектрической станции, «эффективность» системы мероприятий по повышению надежности функционирования электрогенерирующих мощностей и любые другие характеристики эффективности хозяйственной деятельности экономических единиц [2,56,59,60]. Таким образом, результатом оценки объектов $O^{(1)},...,O^{(k)}$ по избранному исследователем качеству является упорядоченный ряд *рангов* (*рейтингов*) $R^{(j_1)}<...<R^{(j_k)}$, представляющих собой числовые оценки $R^{(j_s)}=R(O^{(j_s)})$, $j_s\in\{1,...,k\}$, степени проявления исследуемого качества у соответствующих объектов.

Поскольку сложный объект энергетики $O^{(j)}$ является, как правило, *многопараметрическим* (т.е. может быть описан вектором $x^{(j)}=(x_1^{(j)},...,x_m^{(j)})$ значений *исходных характеристик* $x_1,...,x_m$), постольку естественно предположить, что оценка $R^{(j)}=R(O^{(j)})$ градации исследуемого качества, присущей j-му объекту, есть функция вектора $x^{(j)}$: $R^{(j)}=R(O^{(j)})=V(x^{(j)})=V(x_1^{(j)},...,x_m^{(j)})$. Для упрощения положим, что каждая из исходных характеристик $x_1,...,x_m$ необходима, а все они вместе взятые — достаточны для определения рейтинга $R^{(j)}$ объекта $O^{(j)}$, $j=1,...,k$. Дополнительно предположим, что каждая отдельная исходная характеристика x_i может служить критерием для получения отдельной оценки q_i интенсивности проявления определенного аспекта исследуемого качества. Например, такими отдельными характеристиками соответствующих аспектов качества «надежность» установки, генерирующей тепло и электричество, могут служить «ожидаемое время бесперебойной работы», «минимальная гарантируемая температура генерируемого пара», «максимальная пиковая мощность электрогенератора» и т.д.

Мы сильно упростим дальнейшие рассуждения, если предположим, что искомый рейтинг $R^{(j)}$ сложного объекта электроэнергетики $O^{(j)}$ можно представить в виде функции $Q(q^{(j)})$ вектора $q^{(j)}=(q_1^{(j)},...,q_m^{(j)})$ значений *отдельных показателей* (оценок) $q_1,...,q_m$:

$$R^{(j)}=R(O^{(j)})=V(x^{(j)})=V(x_1^{(j)},...,x_m^{(j)})=Q(q^{(j)})=Q(q_1^{(j)},...,q_m^{(j)}). \qquad (1)$$

В выражении (1) имплицитно содержится еще одно упрощающее предположение, состоящее в том, что каждый отдельный показатель

q_i есть функция $q_i = q_i(x_i)$ только одной исходной характеристики x_i. Важным является также дополнительное требование выполнения условия монотонности

$$\left(q_i^{(j)} \geq q_i^{(l)} \text{ для любого } i \in \{1,...,m\}\right) \Rightarrow \left(Q(q^{(j)}) \geq Q(q^{(l)})\right) \qquad (2)$$

функции $Q(q) = Q(q_1,...,q_m)$. Иными словами, предполагается, что все отдельные показатели одинаково «поляризованы» - увеличение какого-либо показателя q_i при постоянстве значений всех остальных показателей q_s, $s \neq i$, влечет увеличение общей оценки Q.

Полагая, что на значение $Q^{(j)} = Q(q^{(j)})$ общей оценки исследуемого качества оказывают влияние не только значения $q_1^{(j)},...,q_m^{(j)}$ отдельных показателей качества $q_1,...,q_m$, но и *значимость* этих показателей, измеряемая соответствующими *весовыми коэффициентами* («весами») $w_1,...,w_m$, $w_i \geq 0$, $w_1 + ... + w_m = 1$, можно представить общую оценку в виде параметрической функции $Q = Q(q;w) = Q(q_1,...,q_m;w_1,...,w_m)$, определяемой векторным параметром $w = (w_1,...,w_m)$ (вектором весовых коэффициентов).

Если выполнены все упомянутые выше условия, налагаемые на параметрическую агрегирующую функцию $Q(q;w)$, то метод получения рейтинга $R^{(j)}$ деятельности объекта энергетики можно интерпретировать как метод построения *сводного показателя* $Q^{(j)} = Q(q^{(j)};w)$, агрегирующего отдельные показатели $q_1,...,q_m$ исследуемого качества. Этот метод сводных показателей (МСП), описанный А.Н. Крыловым еще в 1908 г. (см., например, [21]), может быть представлен как последовательность следующих шагов.

1. Для фиксированного качества и заданного множества объектов, каждому из которых соответствует определенная градация интенсивности проявления исследуемого качества, формируется вектор $x = (x_1,...,x_m)$ *исходных характеристик*, однозначно определяющий общую оценку интенсивности проявления фиксированного качества.

2. По вектору исходных характеристик $x = (x_1,...,x_m)$ формируется вектор числовых *отдельных показателей* исследуемого качества $q = (q_1,...,q_m)$, где отдельный показатель q_i оценивает соответствующий аспект исследуемого качества (т.е. отдельный показатель q_i оценивает качество с точки зрения i-го *отдельного критерия*, а сам вектор $q = (q_1,...,q_m)$ есть *многокритериальная оценка* исследуемого качества).

3. Выбирается вид параметрической *агрегирующей функции* $Q(q;w)$, определяемой вектором $w = (w_1,...,w_m)$ параметров $w_1,...,w_m$, оце-

нивающих значимость отдельных показателей $q_1,...,q_m$ для сводной оценки качества $Q = Q(q;w)$.

4. Определяются значения весовых коэффициентов $w_1,...,w_m$, подстановка которых в параметрическую агрегирующую функцию делает эту функцию однозначно определенной и позволяет построить *сводный показатель* $Q^{(j)} = Q(q^{(j)};w)$ качества j-го объекта, описываемого вектором $q^{(j)} = (q_1^{(j)},...,q_m^{(j)})$ значений отдельных показателей.

Представленная схема метода построения сводного (глобального, интегрального, обобщенного, генерального, синтетического и т.п.) показателя $Q = Q(q;w)$, агрегирующего отдельные (локальные, дифференциальные, частные, маргинальные, аналитические и т.п. соответственно) показатели $q_1,...,q_m$, является универсальной структурой, все элементы которой проявляются в той или иной степени практически во всех экономико-математических методах оценки деятельности сложных объектов. Иначе говоря, поскольку одна и та же математическая модель, будучи по разному идентифицирована и/или интерпретирована по отношению к описываемой этой моделью объектам и процессам, дает различные экономико-математические модели (см. [28, с.9]), постольку можно сказать, что все наиболее популярные методы оценки деятельности сложных технических и экономических систем суть технические и экономические интерпретации (различной полноты и степени обоснованности) изложенного метода сводных показателей (см. [19, 54]).

Выявленная общая структура метода сводных показателей (МСП) будет формализована и исследована в первой части настоящего доклада, вторая часть которого посвящена модификации МСП на случай, когда имеется дефицит числовой информации, не позволяющий однозначно определить вектор весовых коэффициентов $w = (w_1,...,w_m)$. В этой части доклада строится модель неопределенности задания весовых коэффициентов, основанная на концепции рандомизации неопределенности, восходящей к идеям Т. Байеса. В результате такой рандомизации весовых коэффициентов получается рандомизация и самих сводных показателей, что позволяет говорить о методе рандомизированных сводных показателей (МРСП). В третьей части доклада возможности разработанного МРСП демонстрируются на практическом примере построения рандомизированных сводных показателей для оценки различных вариантов комплекса мероприятий по повышению надежности работы подсистемы электроснабжения ФГУ ГК «Дворец конгрессов».

Методы построения оценок качества сложных объектов

В настоящей части, согласно плану исследований, сформированному на основе анализа схемы метода сводных показателей в конце Введения, мы рассмотрим, прежде всего, общую проблему измерения исходных характеристик сложных объектов и предложим ряд подходов к решению этой проблемы, базирующихся на теории квалиметрических шкал (шкал измерения качества) и учитывающих степень адекватности применяемых шкал реальным процессам и явлениям, являющимся предметом измерений (см. пункт 1.1); затем будут критически проанализированы различные существующие методы построения отдельных показателей как функций от исходных характеристик и обосновано предложение использовать для получения отдельных показателей простейшие кусочно-линейные монотонно невозрастающие (или монотонно неубывающие) нормирующие функции (см. пункт 1.2); последний пункт первой части (пункт 1.3) посвящен исследованию различных агрегирующих функций, синтезирующих отдельные показатели в сводный показатель качества исследуемого сложного объекта и, тем самым, решающих проблему несравнимости многокритериальных оценок по всей совокупности используемых отдельных показателей; исследуется также важный вопрос адекватности предлагаемых агрегирующих функций эмпирическим отношениям, имеющим место для градаций оцениваемого качества, измеряемого по различным шкалам.

Модели измерения исходных характеристик сложных объектов

Проблема построения оценок деятельности сложных объектов электроэнергетики как по отдельным критериям, так и по всей совокупности критериев в целом тесно связана с основной задачей теории измерения, состоящей в выборе подходящей (с точки зрения и экономического содержания решаемой задачи, и формальных требований, предъявляемых к экономико-математическим моделям) *измерительной шкалы* (см.[14,41,42,52]). Да и в основе любой экономико-математической или технической модели лежит представление о совокупности исходных характеристик моделируемого явления, которые представляют собой некоторые переменные, принимающие определенное множество значений. Иными словами, характеристики моделируемого явления предполагаются "измеренными" по какой-либо "шкале". Мы специально ставим эти два слова в кавычки, так как и понятие измерения, и понятие шкалы трактуются в современной науке неоднозначно и требуют подробного разъяснения. При дальнейшем изложении теории шкал измерения мы будем в основном следовать концепции работ [52,55], одновременно учитывая и другие подходы, изложенные в работах [6,14,40,41,43,44,45,61,126].

В классической теории числового измерения отвлекаются от конечной точности реальных измерительных процедур и предполагают, что каждой градации оцениваемого качества может быть приписано определенное действительное число. Более того, само понятие действительного числа вводится как результат предположения о возможности сколь угодно точных измерений: "Действительное число отражает бесконечно уточняемый процесс измерения, или, в несколько ином понимании, абсолютное, бесконечно точное значение величины" [8, с.29–30]. При этом классическая процедура измерения, имеющая своим результатом некоторое действительное число может быть описана следующим образом: "В математической теории измерения отвлекаются от ограниченной точности физического измерения. Задача измерения величины Q при помощи единицы меры U состоит в нахождении числового множителя q в равенстве $Q=qU$, при этом Q и U считаются положительными скалярными величинами одного и того же рода, а множитель q — положительное действительное число" [29, с.78]. С этим определением классического "числового" измерения вполне согласны практически все исследователи (см., например, [3,7,14,17,18,33,34,37,61]).

Смысл вышеописанной классической измерительной процедуры состоит в определении степени проявления q измеряемого качества у измеряемого объекта x: каждому объекту x приписывается положительное действительное число $q=q(x)$ (действительное число — в случае, если рассматриваются качества, допускающие противоположные направления изменения). Условно представляя эту измерительную процедуру в виде некоторого "измерительного прибора", можно сказать, что каждой возможной степени проявления ("интенсивности") измеряемого качества соответствует определенный пункт шкалы прибора. При таком "приборном" представлении классической измерительной процедуры шкалой служит множество всех действительных чисел.

При этом взаимоотношения между градациями измеряемого качества моделируются отношениями между действительными числами, соответствующими этим градациям. Иными словами, предполагается, что качества, являющиеся объектом классического измерения, имеют характер *величин*. Понятие же величины является абстракцией от таких качеств, как длина, площадь, объем, вес, масса, временная длительность, стоимость (цена) продукции (услуг) и т.п., и имеет длительную историю развития. В настоящее время свойства множества

$\{q\}$ возможных градаций качества, носящего характер величины, обычно отождествляются со свойствами множества R^1 действительных чисел (см., например, [13,30,38,49]).

Несомненна роль классической процедуры измерения качеств-величин в деле практического освоения действительности и велико ее значение для развития понятия числа в математике. Однако величины не исчерпывают всего многообразия измеримых качеств - результаты измерительной практики уже давно выходили за рамки классических представлений о чисто числовом характере градаций измеряемых качеств. Примеры подобных "нечисловых" измерений стали особенно многочисленны с конца XIX в., когда математические методы начали использоваться в биологии, психологии, экономике и других подобных областях науки и практики, где традиционное числовое измерение не всегда применимо. Такое обогащение измерительной практики не могло не повлечь за собой попыток модификации традиционного понятия измерения.

Отметим важный промежуточный этап в развитии понятия нечислового измерения, зафиксированный в следующем определении: "В самом общем смысле слово "измерение" обозначает операцию, посредством которой числа (или по крайней мере, *порядковые величины*) приписываются вещам" [51, с.195]. Аналогичный смысл несет и несколько другое определение измерения: "Измерение указывает место отдельной величины среди упорядоченного ряда величин" [63, с.178]. В этих определениях в качестве результатов измерения допускаются не только действительные числа, но и элементы математических систем, обладающих лишь частью свойств системы действительных чисел, обязательно сохраняющих, однако, отношение порядка между своими элементами, подобное отношению неравенства между числами. Если использовать "приборную" интерпретацию измерительной процедуры, то вышеприведенные обобщенные определения измерения предполагают не единственную шкалу (шкалу действительных чисел), а целый набор шкал, отличающихся друг от друга наборами свойств, являющихся поднаборами полной совокупности свойств действительных чисел и обязательно содержащих отношение порядка.

Введение различных шкал, производных от шкалы действительных чисел, оказалось весьма плодотворным. С одной стороны, исследователи получили гибкий метод, позволяющий для каждой конкретной области изучаемых объектов и закономерностей выбирать измерительную шкалу, наиболее полно отражающую существенные отношения объектов. С другой стороны, удалось выделить ряд типичных шкал, распространенность которых наиболее велика, и систематизировать эти шкалы с точки зрения групп допустимых преобразований.

Считая, что шкала задается группой ее допустимых преобразований, укажем далее основные виды шкал измерения.

В *шкале наименований* (*номинальной*) допустимыми являются все взаимно-однозначные преобразования (т.е. числа используются лишь как метки, наименования, условные номера). Иными словами, любое конкретное действительное число $x \in R^1$, присвоенное в результате измерения некоторому объекту, может быть заменено на число $y = \varphi(x) \in R^1$, если отображение $\varphi : R^1 \to R^1$ удовлетворяет условию

$$\forall x_1, x_2 \in R^1 \ \{x_1 \neq x_2\} \Leftrightarrow \{\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)\}. \qquad (1)$$

Про качество, интенсивность проявления которого измеряется по номинальной шкале, можно сказать, что оно измеряется "с точностью до взаимно однозначного преобразования $\varphi : R^1 \to R^1$".

Ординальная (*порядковая*) шкала определяется системой монотонных допустимых преобразований $\varphi : R^1 \to R^1$, то есть преобразований, удовлетворяющих условию

$$\forall x_1, x_2 \in R^1 \ \{x_1 \leq x_2\} \Leftrightarrow \{\varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)\}. \qquad (2)$$

Про качество, интенсивность проявления которого измеряется по ординальной шкале, можно сказать, что оно измеряется "с точностью до монотонного преобразования $\varphi : R^1 \to R^1$".

Оценки экспертов обычно считают измеренными в порядковой шкале. Типичным примером являются задачи ранжирования энергоустановок по надежности. Человеку вообще, похоже, легче и естественнее всего работать именно с ординальными шкалами: (1) "Как показали многочисленные опыты, человек более правильно (и с меньшими затруднениями) отвечает на вопросы качественного, например, сравнительного, характера, чем количественного. Так, ему легче сказать, какая из двух гирь тяжелее, чем указать их примерный вес в граммах" [48, с.3]. (2) "Руководитель, хорошо понимающий особенности своей проблемы, легко определяет важность одного критерия перед другим, но оказывается в затруднительном положении при необходимости выразить ее в числовом виде" [31, с.111]. (3) "Был проведен специально поставленный эксперимент (см. [39]), в котором значимые для лица, принимающего решение (ЛПР), критерии ранжировались [т.е. измерялись по шкале порядка] надежно и устойчиво" [32, с.511]. Существует и ряд других аргументов в пользу ориентации при экспертном оценивании именно на ординальную (порядковую) шкалу измерений (см., например, работы [4,5,11,12,14,15,20,22,24,27,35,37,40,41,42,43,44,45-48,52]). Поэтому далее мы будем предполагать, что степень значимости отдельных характеристик эффективности, надежности и т.п. свойств объектов электроэнергетики оцениваются экспертами именно по ординальной шкале (например, путем ранжировки этих характеристик по мере возрастания (убывания) их значимости).

Шкала отношений определяется группой положительных пропорциональных преобразований $\varphi : R^1 \to R^1$ вида

$$y = \varphi(x) = \alpha\ x, \quad \alpha \in R^1, \alpha > 0\,. \tag{3}$$

Свое название шкала отношений получила потому, что определяющие ее положительные пропорциональные преобразования (преобразования "сжатия" (при $0 < \alpha < 1$) или "растяжения" (при $\alpha > 1$)) имеют своим *инвариантом* (величиной, не изменяющейся под действием данного преобразования) как раз отношение преобразуемых величин:

$$\forall x_1, x_2 \in R^1,\, x_2 \neq 0 \qquad \frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)} = \frac{\alpha\ x_1}{\alpha\ x_2} = \frac{x_1}{x_2}\,. \tag{4}$$

Про качество, интенсивность проявления которого измеряется по шкале отношений, можно сказать, что оно измеряется "с точностью до положительного пропорционального преобразования $\varphi : R^1 \to R^1$, $\varphi(x) = \alpha\, x$, $\alpha > 0$".

Поскольку масштаб измерения (т.е. величина денежной единицы — *д.е.*) финансовых ресурсов энергетической компании выбирается произвольно (из соображений удобства, традиций и т.п.), постольку все ресурсы, лежащие на соответствующих банковских счетах, можно считать измеренными по шкале отношений. При этом финансовые коэффициенты (financial ratios), будучи отношениями соответствующих денежных сумм, являются инвариантными, относительно любых положительных пропорциональных преобразований. Так, например, известный финансовый коэффициент ROA (Return On Assets - возврат по активам), определяемый как отношение ROA=(Net income after taxes)/(Total assets)=(Чистый доход после уплаты налогов)/(Все активы), не изменяется при деноминации денежных единиц или при их пересчете в другую валюту.

Шкала разностей (интервалов) определяется группой линейных преобразований с единичным коэффициентом пропорциональности $\varphi : R^1 \to R^1$ вида

$$y = \varphi(x) = x + \beta, \quad \beta \in R^1\,. \tag{5}$$

Свое название шкала разностей получила потому, что определяющие ее линейные преобразований с единичным коэффициентом пропорциональности (преобразования "сдвига") имеют своим *инвариантом* именно разность преобразуемых величин:

$$\forall x_1, x_2 \in R^1 \quad \varphi(x_1) - \varphi(x_2) = (x_1 + \beta) - (x_2 + \beta) = x_1 - x_2 . \quad (6)$$

Про качество, интенсивность проявления которого измеряется по шкале разностей, можно сказать, что оно измеряется "с точностью до преобразования "сдвига" $\varphi : R^1 \to R^1$, $\varphi(x) = x + \beta$, $\beta \in R^1$".

Если мы рассматриваем динамику финансовых ресурсов энергетической компании, то приращения этих финансовых ресурсов можно трактовать как характеристики, измеряемые по шкале разностей. Действительно, пусть $x_1 = x(t)$ есть объем, скажем, собственного капитала энергетической компании за вычетом исходного акционерного капитала β на момент времени t, а $x_2 = x(t+1)$ - объем собственного капитала за вычетом того же акционерного капитала на следующий момент времени $t+1$. Очевидно, что значения x_1, x_2 получены в результате измерения по шкале разностей, а их приращение $\Delta = x_2 - x_1 = x(t+1) - x(t)$ инвариантно относительно выбора величины "сдвига" $\beta \in R^1$.

Шкала отношений разностей определяется группой положительных линейных преобразований $\varphi : R^1 \to R^1$ вида

$$y = \varphi(x) = \alpha\, x\; + \;\beta, \quad \alpha, \beta \in R^1, \alpha > 0 . \qquad (7)$$

Свое название шкала отношений разностей получила потому, что определяющие ее линейные преобразования с положительным коэффициентом пропорциональности имеют своим *инвариантом* как раз отношение разностей преобразуемых величин:

$$\forall x_i \in R^1,\; i = 1,2,3,4,\; x_3 \neq x_4 \quad \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)}{\varphi(x_3) - \varphi(x_4)} = \frac{(\alpha\, x_1 + \beta) - (\alpha\, x_2 + \beta)}{(\alpha\, x_3 + \beta) - (\alpha\, x_4 + \beta)} = \frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_4} . \quad (8)$$

Про качество, интенсивность проявления которого измеряется по шкале отношений разностей, можно сказать, что оно измеряется "с точностью до положительного линейного преобразования $\varphi : R^1 \to R^1$, $\varphi(x) = \alpha\, x + \beta$, $\alpha, \beta \in R^1$, $\alpha > 0$".

Из приведенных выше примеров понятно, что (при совместном учете динамики собственного капитала энергетической компании за вычетом начального акционерного капитала и возможности изменения масштаба используемых денежных единиц) эту характеристику можно считать измеряемой по шкале отношений разностей.

При другом подходе к определению обобщенных шкал измерения качества "точками" такой шкалы могут быть выбраны не только действительные числа, но и другие математические объекты. Например, широкое распространение получили так называемые *интервальные шкалы*, при измерении по которым каждой градации оцениваемого качества присваивается целый интервал (отрезок) числовых значений $[a,b] = \{x \in R^1 : a \le x \le b\}$ (см., например, [9,36]). Строго говоря, любое числовое измерение является на самом деле (из-за неизбежной погрешности) измерением интервальным.

Заметим, что в процессе развития соответствующей области знания тип шкалы измерения может меняться. Так, сначала температура измерялась по порядковой шкале (холоднее — теплее), затем — по интервальной (шкалы Цельсия, Фаренгейта, Реомюра) и, наконец, после открытия абсолютного нуля температур — по шкале отношений (шкала Кельвина).

Следует также отметить, что среди специалистов иногда имеются разногласия по поводу того, по каким шкалам следует считать измеренными те или иные реальные величины. Один из подходов к решению задачи выбора шкал измерения состоит в учете формы выявляемых закономерностей поведения измеряемых характеристик. Пусть, например, зависимость объема Y электроэнергии, производимой за определенный период времени некоторой генерирующей компанией, от объемов $X_1,...,X_n$ затрат соответствующих факторов производства описывается обобщенной мультипликативной производственной функцией

$$Y = F(X_1,...,X_n) = A \cdot X_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot X_n^{\alpha_n}, \qquad (9)$$

где $A, \alpha_1,...,\alpha_n$ - неизвестные фиксированные положительные параметры. Для того чтобы при оценке указанных параметров можно было использовать простейший вариант метода наименьших квадратов, ориентированный на анализ линейных зависимостей, можно сменить шкалы измерения переменных $X_1,...,X_n,Y$, а именно, перейти к логарифмическим шкалам, по которым измеряются новые переменные $Z_i = \ln X_i$, $i = 1,...,n$, $V = \ln Y$. Логарифмируя обе части соотношения (9), получаем аддитивную форму

$$V = G(Z_1,...,Z_n) = C + \alpha_1 \cdot Z_1 + ... + \alpha_n \cdot Z_n \qquad (10)$$

мультипликативной производственной функции, где $C = \ln A$.

Аналогичный прием, состоящий в выборе подходящих шкал измерения характеристик некоторого сложного объекта электроэнергетики, может быть применен и для получения простейшей формы обобщенного показателя, являющегося функцией соответствующих отдельных характеристик.

Методы построения нормированных оценок

Как было отмечено в предыдущем пункте, одна и та же характеристика сложного объекта электроэнергетики может измеряться по разным шкалам. В дальнейшем, указанная возможность выбора шкалы измерения позволит нам перейти от *исходных характеристик*, зачастую имеющих несопоставимые диапазоны варьирования, к нормированным *отдельным показателям*, принимающим значения из одного и того же заранее обусловленного интервала. Такая "стандартизация" значений различных характеристик позволяет корректно ввести понятие "весового коэффициента", измеряющего сравнительную значимость отдельных показателей.

Наиболее широкое многообразие возможных шкал измерения получается, если допустить возможность любого монотонного преобразования $\varphi : R^1 \to R^1$ исходной шкалы действительных чисел R^1. Выбор именно таких монотонных преобразований в качестве допустимых может быть оправдан следующими соображениями. Предположим, что интенсивность проявления некоторого качества измеряется по исходной числовой шкале R^1. Тогда, если эта числовая шкала преобразуется при помощи строго возрастающего преобразования $\varphi : R^1 \to R^1$, то для любых двух пунктов $x_1, x_2 \in R^1$ числовой шкалы R^1 имеет место соотношение

$$\{x_1 < x_2\} \Leftrightarrow \{\varphi(x_1) < \varphi(x_2)\}\,. \tag{1}$$

Иными словами, порядок следования градаций измеряемого качества, выявляемый при помощи числовой шкалы R^1, сохраняется при любом строго монотонном преобразовании $\varphi : R^1 \to R^1$ этой шкалы. Поэтому, если мы ограничимся задачей выявления упорядочения оцениваемых объектов (скажем, например, электрогенерирующих компаний) по некоторой измеряемой характеристике (скажем, например, по какой-либо характеристике надежности), то измерения по любой из преобразованных шкал могут считаться эквивалентными (*инвариантом* всех таких измерений служит порядок следования градаций измеряемого качества).

Класс шкал $\varphi(R^1)$, получаемых из исходной числовой шкалы R^1 при помощи строго возрастающих преобразований $\varphi : R^1 \to R^1$, может быть существенно расширен, если рассматривать монотонно неубывающие преобразования, удовлетворяющие соотношению

$$\forall x_1, x_2 \in R^1 \;\; \{x_1 < x_2\} \Rightarrow \{\varphi(x_1) \le \varphi(x_2)\}\,. \tag{2}$$

Отличие монотонно неубывающего преобразования (2) от строго возрастающего преобразования (1) состоит в том, что последнее допускает "склеивание" пунктов исходной числовой шкалы R^1: возможно, что в исходной шкале $x_1 \ne x_2$, а в преобразованной шкале имеет место $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. Возможность такого "склеивания" пунктов исходной шкалы можно использовать для объединения всех неразличимо малых (или неразличимо больших) градаций измеряемого качества.

Далее, говоря о шкалах $\varphi(R^1)$, полученных в результате монотонных преобразований исходной шкалы действительных чисел R^1, мы будем рассматривать не только строго возрастающие и неубывающие преобразования вида (1) и (2) соответственно, но и строго убывающие и невозрастающие преобразования вида (3) и (4) соответственно:

$$\forall x_1, x_2 \in R^1 \ \ \{x_1 < x_2\} \Leftrightarrow \{\varphi(x_1) > \varphi(x_2)\}, \tag{3}$$

$$\forall x_1, x_2 \in R^1 \ \ \{x_1 < x_2\} \Rightarrow \{\varphi(x_1) \geq \varphi(x_2)\}. \tag{4}$$

Преобразования вида (3), (4) понадобятся нам, когда возникнет необходимость изменить "полярность" измеряемого качества, например, когда вместо исходной характеристики рискованности деятельности финансового института, измеряемой по исходной шкале действительных чисел R^1, необходимо будет перейти к измеряемой по шкале $\varphi(R^1)$ характеристике надежности этого финансового института.

Рассмотрим несколько наиболее популярных производных шкал $\varphi(R^1)$, используя следующую терминологию: качество, измеряемое по исходной шкале действительных чисел R^1, мы будем называть *исходной характеристикой* x объекта, а то же качество, но измеряемое по производной шкале $\varphi(R^1)$, *индуцированной монотонным преобразованием* $\varphi: R^1 \to R^1$, будем называть *отдельным показателем* $q = q(x)$ данного качества. Удобно представлять значение отдельного показателя для данного оцениваемого объекта как результат оценки этого объекта по некоторому *отдельному критерию*. Чтобы оправдать употребление прилагательного "отдельный" при словах "показатель" и "критерий" забежим немного вперед и отметим, что далее перед нами возникнет задача соединения отдельных показателей (отдельных критериев) в некоторый единый сводный показатель (сводный критерий).

Пусть некоторая исходная характеристика x исследуемых объектов, измеряемая по числовой шкале R^1 принимает значения $x_1,...,x_n$, $x_1 < ... < x_n$, где n — число объектов. Введем функцию $N(x)$, указывающую число объектов, у которых значение исходной характеристики не превосходит $x \in R^1$. Очевидно, что $N(x_1) = 0$, $N(x_n) = n - 1$, $N(x_n + \varepsilon) = n$, где ε есть сколь угодно малая положительная величина. Иными словами, функция $N(x)$ есть кусочно-постоянная, непрерывная слева монотонно неубывающая функция и в таком качестве вполне годится для задания отдельного показателя

$$q(x) = N(x), \quad x \in R^1, \quad N(x) \in \{0,1,2,...,n\}. \tag{5}$$

Значение $N(x_i)$ функции $N(x)$ (значение $q(x_i)$ отдельного показателя $q(x)$) говорит сколько объектов (среди общего числа n) имеют значения исходной характеристики, меньшие значения, имеющегося у i-го объекта.

Часто вместо отдельного показателя (5), принимающего значения из целочисленного отрезка $[0, n-1]$, используют *нормированный* отдельный показатель

$$q(x) = \frac{N(x)}{n-1}, \quad x \in R^1, \; q(x) \in \{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, ..., \frac{n-2}{n-1}, 1\}. \tag{6}$$

В этом случае значение $q(x_i)$ отдельного показателя $q(x)$ говорит о том, какова доля объектов, имеющих значения исходной характеристики x меньшие, чем значение x_i.

Если интерпретировать наблюдаемые значения $x_1,...,x_n$ исходной характеристики x, как реализации некоторой случайной величины $\tilde{x}$, имеющей функцию распределения $F(x;\tilde{x})$, то есть, если интерпретировать ряд наблюдаемых значений как *выборку* из соответствующей генеральной совокупности, то монотонно неубывающая непрерывная слева функция распределения данной случайной величины вполне может служить в качестве отдельного показателя

$$q(x) = F(x;\tilde{x}), \quad x \in R^1, \quad F(x;\tilde{x}) \in [0,1]. \tag{7}$$

Значение $q(x_i) = F(x_i;\tilde{x})$ показателя $q(x) = F(x;\tilde{x})$ указывает вероятность $P\{\tilde{x} < x_i\}$ того, что случайная величина $\tilde{x}$ примет значение меньшее, чем значение x_i данной исходной характеристики x i-го объекта.

Важно отметить, что случайная величина $\tilde{q} = q(\tilde{x}) = F(\tilde{x};\tilde{x})$ имеет равномерное распределение на отрезке $[0,1]$ при любой монотонно возрастающей непрерывной функции распределения $F(x;\tilde{x})$, что создает дополнительные удобства при практической работе с отдельным показателем q.

При такой теоретико-вероятностной интерпретации наблюдаемых значений $x_1,...,x_n$ отдельный показатель (6) есть не что иное, как эмпирическая функция распределения $F^*(x)$, построенная по данной выборке и являющаяся статистической оценкой теоретической функции распределения $F(x)$.

Если дополнительно предположить, что введенная случайная величина $\tilde{x}$ имеет математическое ожидание $\mu = M\tilde{x}$ и дисперсию $\sigma^2 = D\tilde{x}$, то в качестве монотонного преобразования $\varphi : R^1 \to R^1$, индуцирующего соответствующий отдельный показатель $q = q(x) = \varphi(x)$, можно взять линейное преобразование

$$q(x) = \varphi(x) = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \cdot x - \frac{\mu}{\sigma},\ x \in R^1,\ q(x) \in R^1, \tag{8}$$

где параметр σ есть стандартное отклонение (стандарт) случайной величины $\tilde{x}$. Популярность такого преобразования исходных характеристик в статистических исследованиях объясняется тем, что в результате мы получаем случайную величину

$$\tilde{y} = \varphi(\tilde{x}) = \frac{\tilde{x} - \mu}{\sigma}, \tag{9}$$

имеющую нулевое математическое ожидание (т.е. $\tilde{y}$ — *центрированная* случайная величина) и единичное стандартное отклонение (т.е. $\tilde{y}$ — *нормированная* случайная величина):

$$M\tilde{y} = \frac{1}{\sigma} M\tilde{x} - \frac{\mu}{\sigma} = 0,\ D\tilde{y} = \frac{1}{\sigma^2} D\tilde{x} = 1. \tag{10}$$

Для получения отдельного показателя (8) по наблюдаемой выборке $x_1, \ldots, x_n$ значений исходной характеристики x можно воспользоваться оценкой (выборочным средним)

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{11}$$

для параметра μ преобразования (8). Параметр же σ^2 этого преобразования можно заменить, например, выборочной дисперсией

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2, \tag{12}$$

или несмещенной оценкой дисперсии

$$s_0^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2. \tag{13}$$

Подставляя (11), (12) или (11), (13) в (8) вместо μ и σ^2, получаем для отдельного показателя выражение

$$q(x) = \frac{x - \bar{x}}{s} = \left(\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \right)^{-1} x - \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}}, \tag{14}$$

или выражение

$$q(x)=\frac{x-\bar{x}}{s_0}=\left(\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right)^{-1}x-\sqrt{\frac{n-1}{n^2}}\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}} \qquad (15)$$

соответственно.

При построении отдельного показателя часто возникает необходимость сравнения значений исходной характеристики x с некоторым эталонным уровнем x_0. Для учета этого эталонного уровня можно использовать аддитивную или мультипликативную форму отдельного показателя. Аддитивный показатель

$$q(x)=x-x_0, \quad x,x_0\in R^1,\ x_0>0, \qquad (16)$$

указывает степень несовпадения и "направление" несовпадения наблюдаемого значения исходной характеристики с эталонным уровнем, принимая нулевое значение при $x=x_0$, отрицательные значения - при $x<x_0$, положительные — при $x>x_0$. Широко распространена мультипликативная форма учета эталонного значения, при которой отдельный показатель задается формулой

$$q(x)=\frac{x}{x_0}, \quad x,x_0\in R^1,\ x_0>0. \qquad (17)$$

Отдельный показатель (17) также учитывает степень несовпадения и "направление" несовпадения наблюдаемого значения исходной характеристики с эталонным уровнем, принимая единичное значение при $x=x_0$, значение $q<1$ — при $x<x_0$, значение $q>1$ при $x>x_0$.

Более сложной формой учета некоторых эталонных значений является форма сводного показателя, "нормирующего" исходную характеристику путем отображения всего множества ее возможных значений на отрезок $[0,1]$. Пусть у нас имеется исходная характеристика x, измеряющая некоторое качество по числовой шкале R^1. При этом предполагается, что увеличение значений этой характеристики совпадает у увеличением оцениваемого "положительного" качества исследуемых объектов. Например, пусть исследуемым качеством объектов (электрогенерирующих компаний, например) является "надежность", а исходной характеристикой — "достаточность собственного капитала компании", определяемая отношением собственного капитала к сумме ее финансовых обязательств. Обычно можно считать, что увеличение исходной характеристики "достаточность собственного капитала" влечет (при прочих равных условиях) увеличение интенсивности проявления оцениваемого качества "надежность компании".

Положим, далее, что задано некоторое эталонное значение $x = x_-$ исходной характеристики x такое, что все значения, не превосходящие x_- являются одинаково пренебрежимо малыми (с точки зрения соответствующего отдельного критерия оценки). Предполагается одновременно заданным и другое эталонное значение $x = x_+$, $x_- < x_+$, такое, что все значения, большие или равные x_+ являются одинаково достаточно большими (с точки зрения того же отдельного критерия оценки). В этих предположениях можно использовать простейший кусочно-линейный отдельный показатель

$$q(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_-, \\ \dfrac{x - x_-}{x_+ - x_-}, & x_- < x \le x_+, \\ 1, & x > x_+, \end{cases} \qquad (18)$$

монотонно неубывающий при росте уровня исходной характеристики. Эта форма отдельного показателя широко распространена и иногда даже называется "естественной нормализацией" ("естественной нормировкой") (см. [47,57]).

Пусть теперь "полярность" исходной характеристики "отрицательна", т.е. ее увеличение вызывает понижение уровня оцениваемого качества. Например, пусть исследуемым качеством объектов (электрогенерирующих компаний) опять является "надежность", а исходной характеристикой — "число аварий на электрогенерирующих установках за определенный период". Обычно можно считать, что увеличение исходной характеристики "число аварий на электрогенерирующих установках за определенный период" влечет (при прочих равных условиях) уменьшение интенсивности проявления оцениваемого качества "надежность генерирующей компании".

Положим, далее, что задано некоторое эталонное значение $x = x_-$ исходной характеристики x такое, что все значения, не превосходящие x_- являются одинаково достаточно малыми (с точки зрения соответствующего отдельного критерия оценки). Предполагается одновременно заданным и другое эталонное значение $x = x_+$, $x_- < x_+$, такое, что все значения, большие или равные x_+ являются одинаково неприемлемо большими (с точки зрения того же отдельного критерия оценки). В этих предположениях можно использовать простейший кусочно-линейный отдельный показатель

$$q(x)=\begin{cases}1, & x\le x_-,\\ \dfrac{x_+-x}{x_+-x_-}, & x_-<x\le x_+,\\ 0, & x>x_+,\end{cases} \qquad (19)$$

монотонно невозрастающий при росте уровня исходной характеристики.

Для учета характера выпуклости графика функции $q=q(x)$ формулы (18), (19) обобщаются и принимают вид

$$q(x)=\begin{cases}0, & x\le x_-,\\ \left(\dfrac{x-x_-}{x_+-x_-}\right)^{\lambda}, & x_-<x\le x_+,\\ 1, & x>x_+,\end{cases} \qquad (20)$$

$$q(x)=\begin{cases}1, & x\le x_-,\\ \left(\dfrac{x_+-x}{x_+-x_-}\right)^{\lambda}, & x_-<x\le x_+,\\ 0, & x>x_+,\end{cases} \qquad (21)$$

где параметр λ определяет характер выпуклости соответствующих функций: при $\lambda>1$ график функции $q=q(x)$ имеет выпуклость вниз, а при $\lambda<1$ — выпуклость вверх; при $\lambda=1$ функция $q(x)$ линейна на отрезке $[x_-,x_+]$.

Далее мы будем пользоваться нормирующими функциями вида (18), (19). В пользу такого выбора можно, помимо указания на простоту и обширный опыт применения кусочно линейных функций вида (18), (19), привести следующий теоретический аргумент (см. [54, с.87–95]).

Рассмотрим сужение функции $q=q(x)$ (для определенности пусть это будет строго возрастающая функция) на отрезок $[x_-,x_+]$ и разобьем этот отрезок на m одинаковых частей. Разобьем и область значений функции $q=q(x)$ (отрезок $[0,1]$) на n одинаковых частей. Получившаяся в результате решетка содержит $(m+1)\times(n+1)$ дискретных точек, расположенных внутри прямоугольника $[x_-,x_+]\times[0,1]$. Рассмотрим конечное множество $J(m,n)$ всех дискретных монотонно неубывающих функций дискретного аргумента, графики которых через узлы построенной решетки и удовлетворяют граничным условиям $q(x_-)=0$, $q(x_+)=1$. Неопределенность выбора конкретной нормирующей функции из класса $J(m,n)$ будем моделировать при помощи равномерного распределения вероятностей, заданного на этом классе. Иными словами, моделью неопределенности является стохастический процесс с равновероятными монотонными реализациями, проходящими через дискретные точки указанной решетки. Так вот, математическое ожидание этого стохастического процесса, являющееся естественной оценки ожидаемой траектории, совпадает с линейной функцией вида (18), что и является еще одним аргументом в пользу выбора нормирующих функций вида (18), (19), используемых для построения отдельных показателей качества сложных финансово-экономических объектов.

Основным практическим результатом всех вышеприведенных подходов к выбору монотонных преобразований исходных характеристик, измеряемых по соответствующим числовым шкалам, является переход от вектора $x = (x_1,...,x_m)$, $x_i \in R^1$, исходных характеристик к вектору нормированных исходных характеристик (к вектору отдельных показателей) $q = (q_1,...,q_m)$, $q_i \in [0,1]$. При этом, поскольку каждый отдельный показатель q_i может интерпретироваться как оценка фиксированного качества исследуемых объектов по определенному отдельному критерию, постольку значение $q^{(j)} = (q_1^{(j)},....,q_m^{(j)})$ вектора отдельных показателей $q = (q_1,...,q_m)$ есть не что иное как *многокритериальная оценка* j-го объекта.

Методы синтеза сводных показателей сложных объектов

Используя результаты предыдущего пункта, мы теперь можем предполагать, что рассматриваемые k объектов (скажем, электрогенерирующих установок), чье исследуемое качество (скажем, качество "надежность") достаточно полно описывается вектором исходных характеристик $x = (x_1,...,x_m)$, $x_i \in R^1$, $i = 1,...,m$, (например, исходные характеристики – технические нормативы эксплуатации энергоустановки), определяются векторами $q^{(j)} = (q_1^{(j)},...,q_m^{(j)})$, $q_i^{(j)} \in [0,1]$, $i = 1,...,m$, $j = 1,...,k$, каждый из которых есть многокритериальная оценка соответствующего объекта и представляет собой значение вектора отдельных показателей $q = (q_1,...,q_m)$.

Введем на множестве всех оцениваемых объектов, отождествляемых на данном этапе исследования с векторами значений отдельных показателей, *отношение (строгого) покомпонентного доминирования*, обозначаемое $\triangleright$ и определяемое соотношением

$$\left(q^{(r)} \triangleright q^{(s)}\right) \Leftrightarrow \left(\left(\forall i \; q_i^{(r)} \geq q_i^{(s)}\right) \wedge \left(\exists j \; q_j^{(r)} > q_j^{(s)}\right)\right). \qquad (1)$$

Это соотношение можно трактовать как утверждение, что объект $q^{(r)}$ предпочтительнее по оцениваемому качеству (например, по "надежности"), чем объект $q^{(s)}$ тогда и только тогда, когда он не менее предпочтителен по каждому отдельному критерию $(q_i^{(r)} \geq q_i^{(s)})$ и существует критерий, по которому первый объект предпочтительнее второго $(q_j^{(r)} > q_j^{(s)})$ (см. [46]). Будем считать упорядочение объектов, проводимое в соответствии с (1), "строгим" упорядочением (по аналогии со "строгим" упорядочением чисел по отношению строгого неравенства $>$).

Наряду с отношением "строгого" упорядочения по предпочтительности $\triangleright$ введем отношение порядка ("нестрогого") $\trianglerighteq$ следующим образом:

$$\left(q^{(r)} \trianglerighteq q^{(s)}\right) \Leftrightarrow \left(\left(q^{(r)} \triangleright q^{(s)}\right) \vee \left(\forall i \; q_i^{(r)} = q_i^{(s)}\right)\right). \quad (2)$$

Обратно, отношение строгого порядка $\triangleright$ можно определить через отношение порядка $\trianglerighteq$:

$$\left(q^{(r)} \triangleright q^{(s)}\right) \Leftrightarrow \left(\left(q^{(r)} \trianglerighteq q^{(s)}\right) \wedge \left(q^{(r)} \neq q^{(s)}\right)\right). \quad (3)$$

Существенной трудностью, возникающей при упорядочении объектов с помощью отношения покомпонентного доминирования, обычно является наличие большого числа объектов $q^{(r)}$, $q^{(s)}$, *несравнимых* по отношению порядка $\trianglerighteq$, т.е. объектов, для которых не выполняется ни соотношение $q^{(r)} \trianglerighteq q^{(s)}$, ни соотношение $q^{(s)} \trianglerighteq q^{(r)}$. Оценить долю *сравнимых* (по отношению порядка $\trianglerighteq$) объектов позволяет следующее утверждение, являющееся следствием теоремы, доказанной в работе [54, с. 44–45].

Пусть две многокритериальные оценки выбираются "наугад" из совокупности $\{q = (q_1, \ldots, q_m), \; q_i \in [0,1], \; i = 1, \ldots, m\}$ всех возможных векторов отдельных показателей. Под выбором "наугад" здесь понимается выбор двух независимых случайных величин $\tilde{q}^{(r)} = (\tilde{q}_1^{(r)}, \ldots, \tilde{q}_m^{(r)})$, $\tilde{q}^{(s)} = (\tilde{q}_1^{(s)}, \ldots, \tilde{q}_m^{(s)})$, каждая из которых равномерно распределена на указанном множестве всех возможных векторов отдельных показателей. Тогда вероятность сравнимости (по отношению порядка $\trianglerighteq$) этих двух случайных векторов определяется формулой

$$P\left\{\left(\tilde{q}^{(r)} \trianglerighteq \tilde{q}^{(s)}\right) \vee \left(\tilde{q}^{(s)} \trianglerighteq \tilde{q}^{(r)}\right)\right\} = \frac{1}{2^{m-1}}. \quad (4)$$

Из формулы (4) видно, что шансы встретить сравнимые многокритериальные оценки качества быстро уменьшаются с ростом числа используемых критериев. Так, например, если мы оцениваем объекты по $m = 11$ критериям, то вероятность того, что пара наугад выбранных объектов будет сравнима по всем критериям сразу, меньше одной тысячной ($P = 1/2^{10} = 1/1024 < 0.001$).

Для решения указанной *проблемы несравнимости многокритериальных оценок* обычно используется так называемый *метод сводных показателей* (МСП), суть которого состоит в построении по вектору отдельных показателей (по многокритериальной оценке) $q = (q_1,...,q_m)$ сводного показателя Q, представляющего собой некоторую функцию $Q = Q(q) = Q(q_1,....,q_m)$ вектора отдельных показателей q, удовлетворяющую условию монотонности

$$\forall\, q^{(j)}, q^{(l)} \in \{q : q = (q_1,...,q_m), q_i \in [0,1]\}\ \{q^{(j)} \rhd q^{(l)}\} \Rightarrow \{Q(q^{(j)}) \geq Q(q^{(l)})\}. \quad (5)$$

Условие монотонности (5) можно дополнить, не слишком уменьшая общность дальнейших рассуждений, краевыми условиями

$$Q(0,....,0) = 0, \qquad Q(1,...,1) = 1, \quad (6)$$

смысл которых вполне понятен и не нуждается в дальнейших комментариях. Идея построения сводных (интегральных, обобщенных, синтетических, комплексных, агрегирующих и т.п.) показателей, оценивающих качество объектов в целом, уже давно проникла в различные отрасли науки и практики (см., например [1,4,5,10,11,12,16,219,21,24,26,31,47,50,53,54,57,64]).

Из бесконечного многообразия синтезирующих (агрегирующих) функций $Q(q) = Q(q_1,....,q_m)$, удовлетворяющих введенным условиям (5), (6), можно выделить класс *обобщенных взвешенных средних* вида

$$Q_\varphi(q;w) = Q_\varphi(q_1,..,q_m;w_1,...,w_m) = \varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m} w_i\, \varphi(q_i)\right), \quad (7)$$

где $y = \varphi(x)$ - некоторая непрерывная строго возрастающая функция; $x = \varphi^{-1}(y)$ - непрерывная строго возрастающая функция, обратная к функции $y = \varphi(x)$; $w = (w_1,...,w_m)$ — вектор весовых коэффициентов ("весов") ($w_i \geq 0$, $w_1 + ... + w_m = 1$) (см., например, [1,4,5,12,54]). Весовой коэффициент w_i обычно интерпретируется как мера значимости ("весомости") отдельного показателя q_i для определения сводной оценки $Q = Q_\varphi(q;w)$. Иногда обобщенное среднее, определяемое формулой (7), называется "средним по Колмогорову" (см., например, [40,41]) или, точнее, "средним Колмогорова - Нагумо - де Финетти" [54, с.101].

Подставляя в формулу (7) степенную функцию $y = \varphi(x) = x^\lambda$, $\lambda > 0$ ($x = \varphi^{-1}(y) = \sqrt[\lambda]{y}$), получаем *взвешенное степенное среднее порядка* λ, имеющее вид

$$Q_\lambda(q;w) = Q_\lambda(q_1,...,q_m;w_1,...,w_m) = \left(\sum_{i=1}^{m} w_i\, q_i^\lambda\right)^{1/\lambda}. \quad (8)$$

Варьируя значение параметра λ, можно получить из взвешенного степенного среднего (8) практически все реально используемые агрегирующие функции. Действительно, при $\lambda = 1$ получается *взвешенное среднее арифметическое*

$$Q_{+}(q;w) = Q_{1}(q;w) = \sum_{i=1}^{m} w_i\, q_i \,, \tag{9}$$

а при $\lambda \to 0$ — *взвешенное среднее геометрическое*

$$Q_{\times}(q;w) = Q_{0}(q;w) = \prod_{i=1}^{m} q_i^{w_i} \tag{10}$$

отдельных показателей $q_1,...,q_m$.

Заметим, что при $\lambda \to +\infty$, $\lambda \to -\infty$ имеют место предельные соотношения

$$Q_{\lambda}(q;w) \to \max_i \{q_i,\ i = 1,...,m\}\,, \tag{11}$$

$$Q_{\lambda}(q;w) \to \min_i \{q_i,\ i = 1,...,m\} \tag{12}$$

соответственно.

Введенные взвешенное среднее арифметическое (*аддитивная синтезирующая функция*) (9) и взвешенное среднее геометрическое (*мультипликативная синтезирующая функция*) (10) в настоящее являются наиболее популярными агрегирующими функциями в МСП, обеспечивающими "свертку" отдельных показателей $q_1,...,q_m$ оцениваемого качества в единый сводный показатель Q, определяющий уровень качества объекта в целом. При выборе из этих двух синтезирующих функций полезно знать, что эти функции существенно различаются по степени возможной компенсации малых значений отдельных показателей. Действительно, если исследуемый объект, имеющий многокритериальную оценку $q^{(j)} = (q_1^{(j)},...,q_m^{(j)})$, "плох" хотя бы по одному из критериев (например, $q_i^{(j)} \approx 0$), то он *обязательно* будет "плох" и по сводному мультипликативному критерию ($Q_{\times}(q;w) \approx 0$). В случае же аддитивного сводного показателя $Q_{+}(q;w)$ низкий уровень качества по ряду отдельных показателей вполне может быть, в принципе, компенсирован высокими значениями других отдельных показателей, имеющих, к тому же, бóльшую "весомость".

Разумеется, между мультипликативным и аддитивным сводными показателями нет непроходимой пропасти, заставляющей каждый раз пользоваться одним и только одним из них. Более того, мультипликативному сводному показателю можно придать аддитивную форму

$$Q_{+}^{*}(q;w) = \ln Q_{\times}(q;w) = \ln\left(\prod_{i=1}^{m} q_i^{w_i}\right) = \sum_{i=1}^{m} w_i \ln q_i = \sum_{i=1}^{m} w_i\, q_i^{*}\,. \tag{13}$$

При этом, ввиду монотонности логарифмического преобразования, если объект, имеющий многокритериальную оценку $q^{(j)} = (q_1^{(j)},...,q_m^{(j)})$, "лучше", с точки зрения сводного мультипликативного показателя $Q_\times(q;w)$, чем объект $q^{(l)} = (q_1^{(l)},...,q_m^{(l)})$ ($Q_\times(q^{(j)};w) > Q_\times(q^{(l)};w)$), то он будет "лучше" и с точки зрения модифицированного сводного показателя (13) ($Q_+^*(q^{(j)};w) > Q_+^*(q^{(l)};w)$) . Таким образом, изменяя шкалы измерения исходных характеристик и/или отдельных показателей, мы получаем возможность в определенной мере сводить мультипликативную свертку к простейшей аддитивной свертке показателей.

Рассмотрим аддитивную и мультипликативную свертки с точки зрения типа шкалы, по которой соответствующие сводные показатели измеряют исследуемое качество объектов. Пусть отдельные показатели $q_1,...,q_m$ измеряются по шкалам разностей. Это означает (см. пункт 1.1), что каждое значение $q_i^{(0)}$ каждого отдельного показателя q_i известно нам с точностью до неизвестного сдвига $\beta_i \in R^1$. Подставив "сдвинутые" значения $q_i^{(0)} + \beta_i$, $i = 1,...,m$, в формулу аддитивной свертки (9), получаем выражение

$$Q_+(q_1^{(0)} + \beta_1,..,q_m^{(0)} + \beta_m;w) = \sum_{i=1}^{m} w_i\, q_i^{(0)} + \sum_{i=1}^{m} w_i\, \beta_i = Q_+(q_1^{(0)},...,q_m^{(0)};w) + \mathrm{B}, \quad (14)$$

из которого следует, что, если отдельные показатели измерены по шкалам разностей, то и аддитивный сводный показатель измеряется по шкале того же типа (по шкале разностей со "сдвигом" B).

Пусть теперь отдельные показатели $q_1,...,q_m$ измеряются по шкалам отношений. Это означает (см. пункт 1.1), что каждое значение $q_i^{(0)}$ каждого отдельного показателя q_i известно нам с точностью до неизвестного "растяжения" ("сжатия") $\alpha_i \in R^1$, $\alpha_i > 0$. Подставив "растянутые" ("сжатые") значения $\alpha_i\, q_i^{(0)}$, $i = 1,...,m$, в формулу мультипликативной свертки (10), получаем выражение

$$Q_\times(\alpha_1\, q_1^{(0)},...,\alpha_m\, q_m^{(0)};w) = \left(\prod_{i=1}^{m} \alpha_i^{w_i}\right) \times \left(\prod_{i=1}^{m} q_i^{w_i}\right) = \mathrm{A}\, Q_\times(q_1^{(0)},...,q_m^{(0)};w), \quad (15)$$

из которого следует, что, если отдельные показатели измерены по шкалам отношений, то и мультипликативный сводный показатель измеряется по шкале того же типа (по шкале отношений с "растяжением" ("сжатием") A).

Заметим, что зафиксировать "сдвиг" шкалы разностей (определив, например "начало" $q_i = 0$ и/или "конец" $q_i = 1$ отсчёта) гораздо проще, чем выбрать коэффициент "растяжения" ("сжатия") шкалы отношений, который фактически определяет некоторую гипотетическую "единицу" измерения соответствующего отдельного показателя изучаемого качества объектов. Это соображение является еще одним (помимо простоты, понятной интерпретации весовых коэффициентов и т.д.) аргументом в пользу выбора аддитивной синтезирующей функции. Поэтому далее мы будем использовать в основном именно аддитивные свертки $Q_+(q;w)$ отдельных показателей для построения сводных оценок изучаемых объектов (сложных электроэнергетических систем). Такой выбор аддитивной синтезирующей функции подкрепляется и соответствующими психологическими исследованиями, показывающими, что при сравнении многокритериальных оценок исследователи предпочитают именно такой вид свертки отдельных критериев (см., например, [25,58]).

В заключение этого пункта рассмотрим *проблему адекватности* выбора вида агрегирующей функции $Q(q;w)$, $q=(q_1,...,q_m)$, $w=(w_1,...,w_m)$, относительно эмпирической системы отношений, которые имеют место между градациями отдельных показателей $q_1,...,q_m$, измеряемых по соответствующим квалиметрическим шкалам (о различных формализациях проблемы адекватности см., например, [40,41,42,43,44,45,61,62]).

Как было показано в пункте 1.2, каждый отдельный показатель q_i измеряется с точностью до строго возрастающего преобразования $\varphi_i(q_i)$, $i=1,...,m$. Таким образом, шкалы, по которым измеряются компоненты многокритериальной оценки сложного объекта $q=(q_1,...,q_m)$, суть шкалы порядка (ординальные шкалы), задаваемые соответствующими отношениями строгого линейного порядка $\overset{i}{\succ}$, $i=1,...,m$ (см., например, [40,41,42,52]). Многокритериальная же оценка q измеряется в этом случае по шкале порядка, задаваемой отношением строгого порядка $\succ$, определяемого для любых двух векторов $q=(q_1,...,q_m)$, $q'=(q'_1,...,q'_m)$ соотношением

$$(q \succ q') \Leftrightarrow \left(\forall i\ (q_i \overset{i}{\succ} q'_i)\ или\ (q_i = q'_i)\right) и \left(\exists j : q_j \overset{j}{\succ} q'_j\right). \qquad (16)$$

Поскольку используемые для построения сводного показателя агрегирующие функции $Q(q;w)$ предполагаются монотонными (в смысле выполнения соотношения (5)), постольку имеет место инвариантность упорядочения объектов по значениям сводного показателя $Q(q;w)$ относительно любой системы строго возрастающих преобразований $\varphi_i(q_i)$, $i=1,...,m$:

$$\begin{gathered}\left[Q(q_1,...,q_m;w) \geq Q(q'_1,...,q'_m;w)\right] \Leftrightarrow \\ \left[Q(\varphi_1(q_1),...,\varphi_m(q_m)) \geq Q(\varphi_1(q'_1),...,\varphi_m(q'_m))\right].\end{gathered} \qquad (17)$$

Таким образом, оказывается, что допустимые (т.е. сохраняющие отношения между градациями отдельных показателей) преобразования $\varphi_i(q_i)$, $i = 1,...,m$, отдельных показателей $q_1,...,q_m$ являются допустимыми и по отношению к сводному показателю $Q(q_1,...,q_m;w)$, сохраняя отношение нестрогого порядка $\geq$ между градациями качества, измеряемого этим сводным показателем. Иными словами, используемые нами сводные показатели, удовлетворяющие условию монотонности (5), являются адекватными относительно монотонных преобразований значений отдельных показателей.

Литература

1. Авен П.О., Мучник И.Б., Ослон А.А. Функциональное шкалирование. Агрегирующие интегральные показатели. М., 1986.
2. Аврех Г.Л., Федоренко Н.П., Щукин Е.П. Затраты и результаты. М., 1990.
3. Агалецкий П.Н. Измерение // Физический энциклопедический словарь. Т.2. М., 1962. С.129-130.
4. Азгальдов Г.Г., Азгальдова Л.А. Количественная оценка качества. М., 1971.
5. Азгальдов Г.Г., Райхман Э.П. О квалиметрии. М., 1973.
6. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика. Основы моделирования и первичная обработка данных. М., 1983.
7. Алабужев П.М., Геронимус В.Б., Минкевич Л.М. Теория подобия и размерностей. М., 1968.
8. Александров А.Д. Общий взгляд на математику // Математика, ее содержание, методы и значение. Т.1. М., 1956. С.5-78.
9. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. М., 1987.
10. Аллен Р. Экономические индексы. М., 1980.
11. Андрианов Ю.М., Лопатин М.В. Квалиметрические аспекты управления качеством новой техники. Л., 1983.
12. Андрианов Ю.М., Субетто А.И. Квалиметрия в приборостроении и машиностроении. Л., 1990.
13. Андронов И.К. Математика действительных и комплексных чисел. М., 1975.
14. Берка К. Измерения. М., 1987.
15. Бернштейн С.Н. Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей // Сообщения Харьковского математического общества. 1917. Т.15. №5-6.С.209-274.
16. Богданчук В.З., Егоров Б.М., Катулев А.Н. Агрегирование векторных критериев. Л., 1990.
17. Бриджмен П. Анализ размерностей. М.;Л., 1934.
18. Бурдун Г.Д., Марков Г.Н. Основы метрологии. М., 1972.
19. Вишняков И.В. Экономико-математические модели оценки деятельности коммерческих банков. СПб., СПбГУ, 1999.
20. Вишняков И.В., Михайлов М.В., Хованов Н.В. Методика оценивания финансово-экономических объектов с использованием системы поддержки принятия решений АСПИД-3. СПб., СПбГУ, 1998.

21. Герасимова Л.В., Погожев И.Б. Комплексная оценка качества проектов и выбор оптимального варианта по методу академика А.Н. Крылова // Стандарты и качество. 1972. №8. С.37-39.
22. Гличев Ф.В., Рабинович Г.О., Примаков М.И. Прикладные вопросы квалиметрии. М., 1983.
23. Горшков А.С., Мясников А.В., Хованов Н.В. Прогнозирование эволюции сложных систем в условиях неопределенности // Материалы 6-й международной конференции «Анализ, прогнозирование и управление в сложных системах». Т. 2. СПб., СЗАГС, 2005. С. 168-174.
24. Губкин А.С. О предложениях А.Н. Крылова по сравнительной оценке проектов кораблей // Судостроение. 1958. №3. С.1-3.
25. Доес Р. Устойчивая привлекательность неправильных линейных моделей принятия решений // Нормативные и дескриптивные модели принятия решений. М., 1981. С.305-309.
26. Кевеш П. Теория индексов и практика экономического анализа. М., 1990.
27. Кирута Ф.Я., Рубинов А.М., Яновская Е.Б. Оптимальный выбор распределений в сложных социально-экономических задачах. Л., 1980.
28. Клейнер Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применение. М., 1986.
29. Колмогоров А.Н., Самсонов Ю.В., Широков К.П. Измерение // БСЭ, 3-е изд. Т.10. М., 1972.
30. Ландау Э. Основы анализа. М., 1947.
31. Ларичев О.И. Наука и искусство принятия решений. М., 1979.
32. Ларичев О.И., Никифоров А.Д. Аналитический обзор процедур решения многокритериальных задач математического программирования // Экономика и математические методы. Т.22. Вып.3. М., 1986. С.508-523.
33. Лебег А. Об измерении величин. М., 1938.
34. Маликов С.Ф., Тюрин Н.И. Введение в метрологию. М., 1966.
35. Маршалл А., Олкин И. Неравенства: теория мажоризации и ее приложения. М., 1983.
36. Меньшиков Г.Г. Практические начала интервальных вычислений. Л., 1991.
37. Миркин Б.Г. Анализ качественных признаков. М., 1976.
38. Нечаев В.И. Числовые системы. М., 1975.
39. Никифоров А.Д., Ребрик С.Б., Шепталова Л.П. Экспериментальное исследование устойчивости предпочтений при выполнении ЛПР некоторых операций в задачах принятия решений // Процедуры оценивания многокритериальных альтернатив. М., 1984.

40. Орлов А.И. Устойчивость в социально-экономических моделях. М., 1979.
41. Орлов А.И. Прикладная теория измерений // Прикладной многомерный статистический анализ. М., 1978. С.68-138.
42. Пфанцагль И. Теория измерений. М., 1976.
43. Стивенс С. Математика, измерение, психофизика // Экспериментальная психология. Т.1. М., 1960. С.9-110.
44. Суппес П., Зинес Д. Основы теории измерений // Психологические измерения. М., 1967. С.9-110.
45. Толстова Ю.Н. Логика математического анализа социологических данных. М., 1991.
46. Тондл Л. Отношение предпочтения // Вопросы кибернетики. №90. М., 1984. С.147-170.
47. Трухаев Р.И. Модели принятия решений в условиях неопределенности. М., 1981.
48. Тюрин Ю.Н., Литвак Б.Г., Орлов А.И., Сатаров Г.А., Шмерлинг Д.С. Анализ нечисловой информации. М., 1981.
49. Феферман Ф. Числовые системы. М., 1971.
50. Фишберн П. Многомерные функции полезности в теории ожидаемой полезности // Статистические модели и многокритериальные задачи принятия решений. М., 1979. С.10-44.
51. Фресс П., Пиаже Ж. Экспериментальная психология. М., 1966.
52. Хованов Н.В. Математические основы теории шкал измерения качества. Л., ЛГУ, 1982.
53. Хованов Н.В. АСПИД - система квалиметрических методов оценивания в условиях дефицита информации качества сложных технических объектов // Методология и практика оценивания качества продукции. Л., ЛДНТП, 1988. С. 56-61.
54. Хованов Н.В. Анализ и синтез показателей при информационном дефиците. СПб., СПбГУ, 1996.
55. Хованов Н.В. Математические модели риска и неопределенности. СПб., СПбГУ, 1998.
56. Хованов Н.В., Федотов Ю.В., Воробьев В.И. Основная экономико-математическая модель оценивания качества и затрат // Материалы 6-й Санкт-Петербургской международной конференции «Региональная информатика-98. РИ-98». СПб., РАН, 1998. С. 53-54.
57. Хоменюк В.В. Элементы теории многоцелевой оптимизации. М., 1983.
58. Dawes R., Carrigan B. Linear models in decision making // Psychol. Bull. 1974. Vol.81. P.95-106.

59. Hovanov N., Fedotov Yu., Kornikov V. General aggregation problem in economics // Abstracts of the IV-th International Workshop "Multiple Criteria and Game Problems under Uncertainty". M., RAS, 1996. P. 37.
60. Hovanov N., Kolari J. Estimating the overall financial performance of Mexican banks using a new method for quantifying subjective information // The Journal of Financial Engineering, 1998, vol.7, No.1, pp.59-77.
61. Kanger S. Measurement: an essay in philosophy of science // Theoria. 1972. Vol.38. №1-2. P.1-44.
62. Krantz D. Foundations of Measurement. N.Y., 1995.
63. Nelson T., Bartley S. Numerosity, number, arithmetization // Philosophical Sciences. 1961. Vol.28. №2. P.178-203.
64. Wittmuss A. Scalarizing multiobjective optimization problems // Math. Res. 1985. Vol.27. P.255-258.